I. Ondes sonores shériques.

Une «sphère pulsante» de centre O fixe et de rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega\, t)$ avec $a_1 \ll a_0 \ll c/\omega$ émet des ondes sonores de façon isotrope. On cherche donc à l'équation de propagation relative à la pression acoustique des solutions de la forme $p(r,t)$; on rappelle que :

$$\Delta p = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial r^2}$$

Question 1 :
Montrer qu'on doit choisir comme solution, à un déphasage près :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

où A est une constante encore à préciser.

La pression acoustique $p(r,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert tridimensionnelle, soit

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial r^2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial r^2} = \frac{r}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial t^2}$$

ce qui montre que le produit $r\,p$ vérifie l'équation de d'Alembert monodirectionnelle dont les solutions propagatives sinusoïdales sont bien connues :

$$r\,p(r,t) = A\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{d'où} \quad p(r,t) = \frac{A}{r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Question 2 :
Calculer le champ de vitesse $v(r,t)\,\overrightarrow{e}_r$ et simplifier dans les deux hypothèses suivantes :
– $r \ll \lambda = 2\,\pi\,c/\omega$,
– $r \gg \lambda$.
En déduire la valeur de la constante A.

Dans tous les bons cours, l'approximation acoustique appliquée à l'équation d'Euler conduit à :

$$\mu_0\,\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

soit ici :

$$\mu_0\,\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \jmath\,\omega\,\mu_0\,\overrightarrow{v} = -\frac{\partial p}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} = \left[\frac{A}{r^2}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\jmath\,\omega\,A}{c\,r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_r}$$

d'où :

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{\mu_0\,\omega}\left[-\frac{\jmath\,A}{r^2}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{A\,\omega}{c\,r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_r}$$

soit, avec $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$

$$v(r,t) = \frac{A}{\mu_0\,\omega}\left[-\frac{\jmath}{r^2}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{2\,\pi}{\lambda\,r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Si r est grand devant λ, le premier terme est négligeable et

$$v(r,t) = \frac{A}{\mu_0\,\omega}\,\frac{2\,\pi}{\lambda\,r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{A}{\mu_0\,c\,r}\,\exp \jmath\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

et l'on retrouve le lien classique entre pression et vitesse (division par $Z = \mu_0\, c$). Cette zone $r \gg \lambda$ est appelée zone de rayonnement. Dans un «laboratoire» dont la taille est petite par rapport à la distance à la source, les surfaces d'onde sphériques sont perçues classiquement comme des plans parallèles.

Si r est petit devant λ, le second terme est négligeable et

$$v(r,t) = -\frac{\jmath\, A}{\mu_0\, \omega}\, \frac{1}{r^2}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

En particulier, pour $r = a(t) \approx a_0$, la vitesse acoustique s'identifie à la vitesse de la surface de la sphère

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_0 + a_1\, \exp \jmath\omega\, t) = \jmath\, \omega\, a_1\, \exp \jmath\omega\, t$$

d'où

$$-\frac{\jmath\, A}{\mu_0\, \omega}\, \frac{1}{a_0^2}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{a_0}{c}\right) = \jmath\, \omega\, a_1\, \exp \jmath\omega\, t$$

L'égalité des arguments n'apporte rien d'essentiel ; l'identification des modules conduit à $|A| = \mu_0\, \omega^2\, a_0^2\, a_1$

Question 3 :

Calculer la puissance rayonnée à travers une shère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$. Ce résultat dépend-il de r ? Commenter. Dépend-il de la fréquence ? Commenter.

On notera pour alléger $A = A^*\, \exp \jmath\varphi$

La puissance qui traverse une surface est le flux du produit $p\, \overrightarrow{v}$. Le fait qu'il s'agit d'un produit impose le retour aux notations réelles. Pour une sphère, ce vecteur est normal et uniforme, donc, à grande distance

$$\mathcal{P} = p(r,t)\, v(r,t)\, S = 4\,\pi\, r^2\, \frac{A^*}{r}\, \cos\omega \left(t - \frac{r}{c} + \varphi\right)\, \frac{A^*}{\mu_0\, \omega}\, \frac{2\,\pi}{\lambda\, r}\, \cos\omega \left(t - \frac{r}{c} + \varphi\right) = \frac{8\,\pi^2\, A^{*2}}{\mu_0\, \omega\, \lambda}\, \cos^2\omega \left(t - \frac{r}{c} + \varphi\right)$$

ou encore, avec $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$

$$\mathcal{P} = \frac{4\,\pi\, A^{*2}}{\mu_0\, c}\, \cos^2\omega \left(t - \frac{r}{c} + \varphi\right)$$

de moyenne temporelle

$$\langle\, \mathcal{P}\, \rangle = \frac{2\,\pi\, A^{*2}}{\mu_0\, c}$$

résultat qui ne dépend par de r, ce qui assure la conservation de l'énergie. Dépend-il de ω ? Ça dépend : à amplitude A^* de l'onde égale, non mais à amplitude a_1 de la vibration de la sphère égale, si car A^* est proportionnel à ω^2 et donc $\langle\, \mathcal{P}\, \rangle$ à ω^4 (voir le cours sur le rayonnement du dipôle électrique oscillant).

Question 4 :

Calculer l'impédance complexe au niveau de la sphère, soit $Z = p(a_0,t)/v(a_0,t)$ et comparer à l'impédance d'une onde plane. En déduire qu'on peut considérer qu'il y a un nœud de pression à l'extrémité d'un tuyau ouvert sur l'atmosphère.

On a déjà remarqué qu'à grande distance, on retrouve $v(r,t) = p(r,t)/Z_\infty$ avec $Z_\infty = \mu_0\, c$, c'est-à-dire le même résultat que pour une onde plane.

Au niveau de la sphère

$$p(a_0,t) = \frac{A}{a_0}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{a_0}{c}\right)$$

$$v(a_0,t) = -\frac{\jmath\, A}{\mu_0\, \omega}\, \frac{1}{a_0^2}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{a_0}{c}\right)$$

qui permet de définir une impédance au niveau de la source, dite impédance de rayonnement

$$Z_0 = \frac{p(a_0,t)}{v(a_0,t)} = \jmath\, \mu_0\, \omega\, a_0$$

soit, toujours avec $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$

$$Z_0 = 2\,\jmath\,\pi \frac{\mu_0\, c\, a_0}{\lambda} = 2\,\jmath\,\pi \frac{Z_\infty\, a_0}{\lambda}$$

On en déduit que $|Z_0| \ll Z_\infty$ car $a_0 \ll \lambda$ par hypothèse.

A la sortie d'un tuyau sonore l'onde sonore diffracte sous forme d'une onde sphérique ; par continuité, la vitesse acoustique est la même dans le tuyau et dans l'onde diffractée. La faible valeur de Z_0 permet donc de dire que la pression acoustique est quasiment nulle et par continuité elle l'est dans le tuyau : on a donc un nœud de pression à l'extrémité du tuyau sonore.

II. Ondes sphériques stationnaires. Flûte à bec et hautbois.

Un tuyau conique de sommet imaginaire O se limite à la portion de cône entre les rayons a et b. Il est siège d'une onde sphérique stationnaire, somme de deux ondes progressives dans les deux sens de même amplitude mais déphasées.

Question 5 :
Donner l'expression générale de la pression acoustique et de la vitesse acoustique.

Au vu de l'exercice précédent, on peut écrire

$$p(r,t) = \frac{A}{r}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{B}{r}\, \exp \jmath\omega \left(t + \frac{r}{c}\right)$$

On tire toujours la vitesse par

$$\mu_0\, \frac{\partial v}{\partial t} = \jmath\, \omega\, \mu_0\, v = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

on trouve ici

$$v(r,t) = \frac{\jmath}{\mu_0\, \omega} \left[-\frac{A}{r^2}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{B}{r^2}\, \exp \jmath\omega \left(t + \frac{r}{c}\right) - \frac{\jmath\, \omega\, A}{c\, r}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\jmath\, \omega\, B}{c\, r}\, \exp \jmath\omega \left(t + \frac{r}{c}\right) \right]$$

Question 6 :
L'extrémité $r = b$ débouche sur l'atmosphère et se comporte comme un nœud de pression ; préciser les expressions précédentes.

Cette condition, reportée dans l'expression de la pression conduit à

$$0 = \frac{A}{b}\, \exp \jmath\omega \left(t - \frac{b}{c}\right) + \frac{B}{b}\, \exp \jmath\omega \left(t + \frac{b}{c}\right)$$

d'où $\qquad A\, \exp \left(-\jmath \dfrac{\omega\, b}{c}\right) = -B\, \exp \jmath \dfrac{\omega\, b}{c} \qquad$ ou encore $\qquad A = -B\, \exp \jmath \dfrac{2\,\omega\, b}{c}$

Question 7 :
L'instrument est une flûte à bec ; l'extrémité $r = a$ est un biseau qui se comporte lui

aussi comme un nœud de pression . Quelles sont les fréquences possibles ? Y a-t-il une différence avec la flûte traversière de perce cylindrique ?

On a donc aussi

$$A = -B\,\exp \jmath \frac{2\,\omega\,a}{c}$$

$$\text{d'où} \qquad \exp \jmath \frac{2\,\omega\,a}{c} = \exp \jmath \frac{2\,\omega\,b}{c}$$

$$\text{d'où} \qquad \frac{2\,\omega\,b}{c} - \frac{2\,\omega\,a}{c} = 2\,p\,\pi \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N}$$

$$\text{soit} \qquad \frac{2\,\omega}{c}\,(b-a) = \frac{4\,\pi\,f}{c}\,(b-a) = \frac{4\,\pi}{\lambda}\,(b-a) = 2\,p\,\pi$$

On retrouve la condition classique $L = p\,\lambda/2$ avec ici $L = b - a$ et les mêmes fréquences qu'un tuyau cylindrique :

$$f_p = p\,\frac{c}{2\,L}$$

Le premier harmonique est l'harmonique 2, l'octave du fondamental : les flûtes à bec et traversière «octavient».

Question 8 :

L'instrument est un hautbois (ou un saxophone) ; l'extrémité $r = a$ est une anche et se comporte comme un nœud de vitesse. Quelles sont les fréquences possibles (résolution graphique avec $(b-a) \approx 3\,a$ et commentaires). Comparer avec une clarinette de perce cylindrique.

La condition $v(a,t) = 0$ s'écrit, en simplifiant par $\exp \jmath\omega\,t$ et par a^2

$$A\,\exp\left(-\jmath\frac{\omega\,a}{c}\right) + B\,\exp\left(\jmath\frac{\omega\,a}{c}\right) + \jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,A\,\exp\left(-\jmath\frac{\omega\,a}{c}\right) - \jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,B\,\exp\left(\jmath\frac{\omega\,a}{c}\right) = 0$$

On multiplie par $\exp\left(-\jmath\frac{\omega\,b}{c}\right)$, on reporte $A\,\exp\left(-\jmath\frac{\omega\,b}{c}\right) = -B\,\exp \jmath\frac{\omega\,b}{c}$, on simplifie par B et l'on pose $\varphi = \frac{\omega\,(b-a)}{c}$, d'où

$$-\exp(\jmath\varphi) + \exp(-\jmath\varphi) - \jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,\exp(\jmath\varphi) - \jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,\exp(-\jmath\varphi) = 0$$

$$-2\,\jmath\,\sin\varphi - 2\,\jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,\cos\varphi = 0$$

$$\tan\varphi = -\frac{\omega\,a}{c} = -\frac{a}{b-a}\,\frac{\omega\,(b-a)}{c} = -K\,\varphi$$

avec $K = \dfrac{a}{b-a} \approx 1/3$. On résout graphiquement en superposant les graphes des deux membres (graphe en fin de document).

La valeur $K = 1/3$ valeur correspondant à la perce d'un hautbois qui passe d'un diamètre $D_a = 4$ mm à un diamètre $D_b = 12$ mm car $a/(b-a) = D_a/(D_b - D_a)$ si l'on en croit l'immortel Thalès.

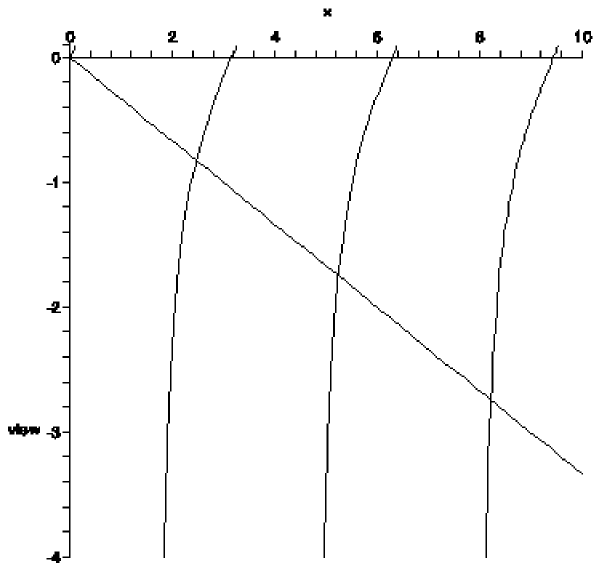
Par rapport à un instrument à perce cylindrique, on n'a plus la condition classique $L = (2\,p+1)\,\lambda/4$ avec ici $L = b - a$ ni les mêmes fréquences qu'un tuyau cylindrique, qui seraient :

$$f_{2\,p+1} = (2\,p+1)\,\frac{c}{4\,L} \quad \text{ou} \quad \omega_{2\,p+1} = (2\,p+1)\,\frac{\pi\,c}{2\,L} \quad \text{correspondant à} \quad \varphi = \frac{\omega\,L}{c} = (2\,p+1)\,\frac{\pi}{2}$$

Pour trouver des valeurs numériques, il est plus parlant de poser $\varphi = x\,\pi/2$ et de demander à un logiciel de calcul de résoudre

$$\tan\left(\frac{\pi\,x}{2}\right) = -K\,\frac{\pi\,x}{2}$$

Là où une clarinette[1] donne x=1, 3, 5, 7..., le hautbois donne $x_1 = 1,56$ puis $x_3 = 3,33$ et $x_5 = 5,22$, et $x = 7,17$,...On n'a plus du tout des multiples entiers et impairs du fondamental, tout au moins en théorie, en réalité la présence du pavillon, la forme et la taille des trous modifie tout cela et un bon facteur[2] de haubois en fait malgré tout un instrument harmonieux qui quintoie comme tout instrument à anche.



[1]Le premier harmonique est l'harmonique 3, une douzième, à savoir une octave plus une quinte, au dessus du fondamental : la clarinette «quintoie»

[2]pour les instruments de musique, on ne parle pas de fabricant sauf, bien sûr, dans le cas de flutes à bec en plastique